

交流回路

第6週目

教科書 3. 1, 3. 2, 3. 3

Agenda

- 交流
- コイル, コンデンサ
- 交流回路の解析

三角関数の復習

- 加法定理（これだけは忘れないで）

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

- 派生で2倍角の公式

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2\cos^2 \theta - 1\end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \\ &= 2\cos \theta \sin \theta\end{aligned}$$

三角関数の復習

- 三角関数の微分

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta$$

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta$$

- 三角関数の積分

$$\int \cos \theta d\theta = \sin \theta$$

$$\int \sin \theta d\theta = -\cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{\tan^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\tan^2 \theta}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right) \cos^2 \theta = \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

$$(\tan^2 \theta + 1) \cos^2 \theta = 1$$

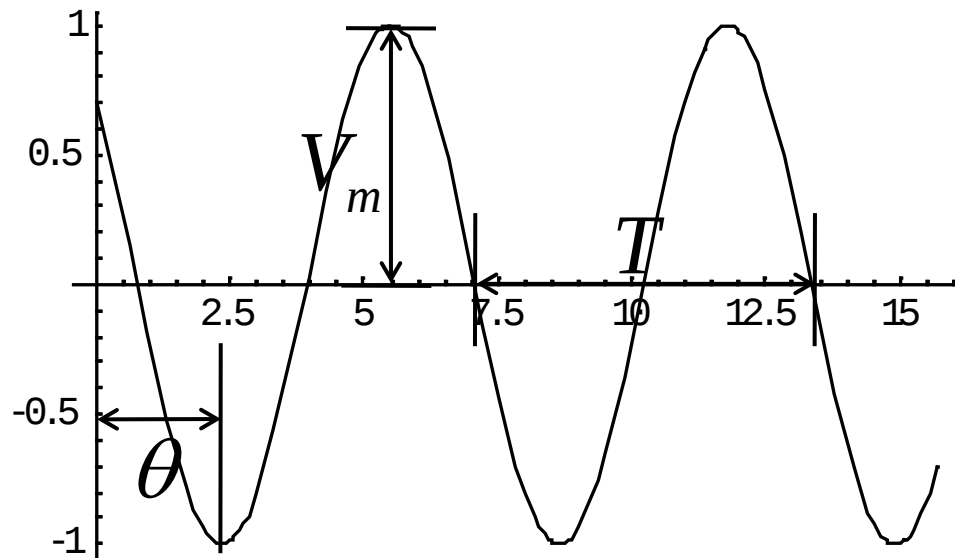
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$$

3. 1(1) 正弦波交流

- 交流電流は次式であらわされる.

$$\text{瞬時値 } v = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

ω :角周波数(角速度)



周波数 $f = \frac{1}{T}$

周波数と角速度の関係式 (必須)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

3. 1 (1) 交流の平均値と実効値

- 定義「交流の平均値」・・・ **半周期**の平均値

$$\begin{aligned} V_{ave} &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} v dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_m \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} V_m \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^{T/2} \\ &= \frac{2V_m}{T\omega} \left(\left(-\cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) \right) - (-\cos(0)) \right) = \frac{2V_m}{T \frac{2\pi}{T}} \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) + 1 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} V_m \end{aligned}$$

3. 1(1) 交流の平均値と実効値

- 定義「実効値」・・・ **1周期の瞬時値の二乗平均**
(直流の電力と同じ電力になるように定義)

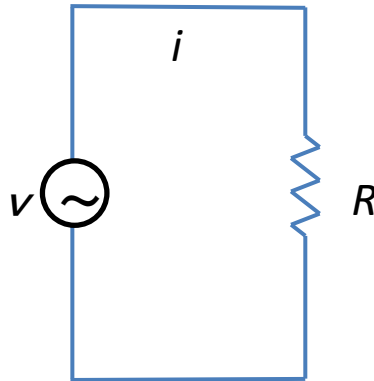
$$\begin{aligned} V_e &= \sqrt{\frac{\int_0^T v^2 dt}{T}} = \sqrt{\frac{\int_0^T (V_m \sin(\omega t))^2 dt}{T}} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \frac{V_m}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}}} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sin 2\omega \frac{2\pi}{\omega}}{2\omega} \right) + \left(\frac{\sin 0}{2\omega} \right) \right\}} = \frac{V_m}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3. 1 (3) 交流電力

- 瞬時電力

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \quad i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$p = vi = V_m \sin(\omega t + \theta_v) I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$



3. 1 (3) 交流電力

- 定義「交流電力」・・・ 瞬時電力1周期の平均

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_m \sin(\omega t + \theta_v) I_m \sin(\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{V_m I_m}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \theta_v) \sin(\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \end{aligned}$$

単なる積分の問題です.

- 電圧, 電流の実効値を V , I , 電圧電流の位相差を θ とすると

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \text{ より } P = VI \cos \theta$$

VI : 皮相電力
 $\cos \theta$: 力率

$$P = VI \sin \theta \quad \text{無効電力}$$

Quiz 5-1:交流電力

- 次の交流電圧 について下記の問いに答えよ.

$$v = V_m \cos(\omega t)$$

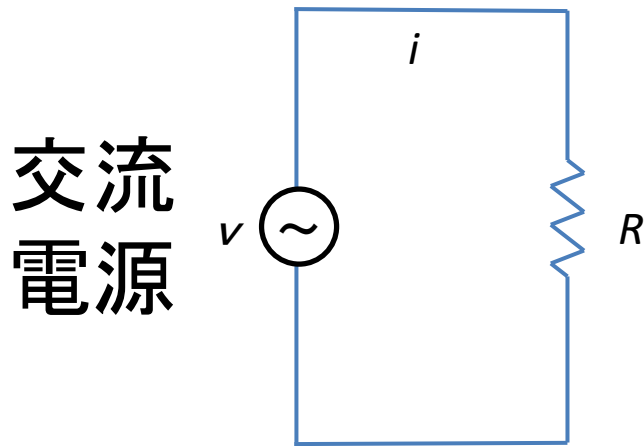
1. 交流電圧の平均値 V_a を求めよ.
2. 同電圧の実効値 V_e を求め, 実効値 V_e が100Vとなる最大値 V_m を求めよ.

Answer 5-1:交流電力

Answer 5-1:交流電力

3. 2(1) 交流回路：電気抵抗

- 交流回路に起電力 v が印加された時の電流 i は



$$v = Ri$$

オームの法則そのもの

$$i = I_m \sin \omega t \quad \text{とすると}$$

$$v = RI_m \sin \omega t = V_m \sin \omega t$$

3. 2(1) 交流回路: 電気抵抗

- 交流電力は...

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i dt = \frac{1}{T} \int_0^T R I_m^2 \sin^2 \omega t = \frac{R I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt \\ &= \frac{R I_m^2}{2T} \left(T - \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} \right) = \frac{R I_m^2}{2} \end{aligned}$$

- 電圧, 電流の実効値 V , I とすると

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \text{ より } P = VI$$

VI: 皮相電力
力率 = $\cos \theta = 1$

3. 2(2) 交流回路：インダクタンス

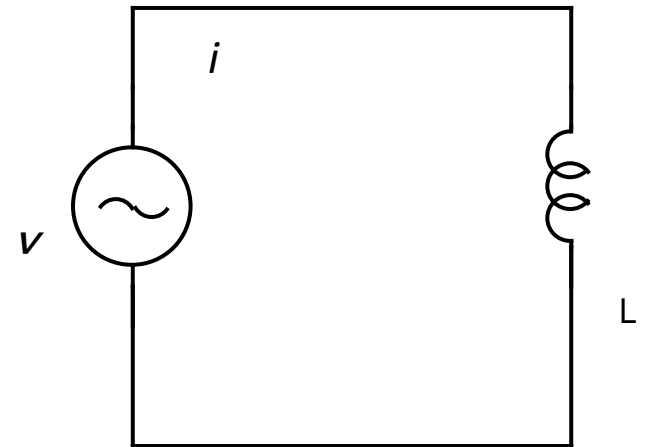
- コイルの直列回路に，交流電流*i*が流れるとき，コイル両端の電圧は.

$$v = -L \frac{di}{dt}$$

$i = I_m \sin \omega t$ とすると

$$v = -L \frac{d}{dt} I_m \sin \omega t = -L I_m \cos \omega t$$

$$= -L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



3. 2(2) 交流回路: インダクタンス

- 交流電力は...

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i dt = \frac{1}{T} \int_0^T -I_m \sin \omega t L I_m \cos \omega t dt \\ &= -\frac{L I_m^2}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = -\frac{L I_m^2}{T} \int_0^T \frac{\sin 2\omega t}{2} dt \\ &= -\frac{L I_m^2}{2T} \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \end{aligned}$$

- 電圧, 電流の実効値 V, I とすると

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \text{ より } P = VI \cos \frac{\pi}{2}$$

VI: 皮相電力
力率 = $\cos \theta = 0$

3. 2(3) 交流回路：キャパシタンス

- コンデンサの直列回路に，交流電圧 v が印加されるとき，

- コンデンサに蓄積される電荷を q とすると

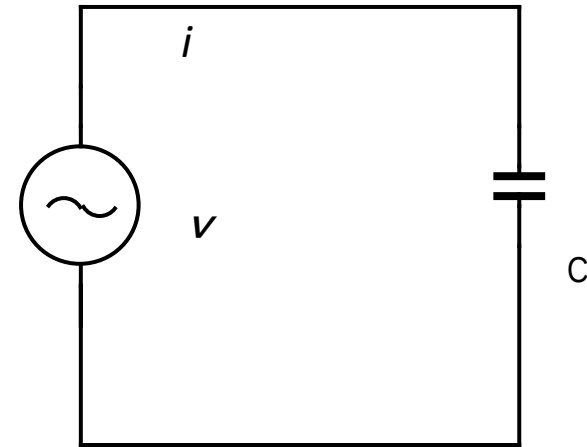
$$q(t) = Cv(t)$$

- コンデンサ両端の電流は $i = \frac{d}{dt}q(t)$

- 電圧 v を正弦波とすると

$$i = \frac{d}{dt}q(t) = CV_m \frac{d}{dt} \sin \omega t$$

$$= CV_m \cos \omega t = CV_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$



位相差が $\frac{\pi}{2}$ なので，力率 $=0$ となり，交流電力はゼロ

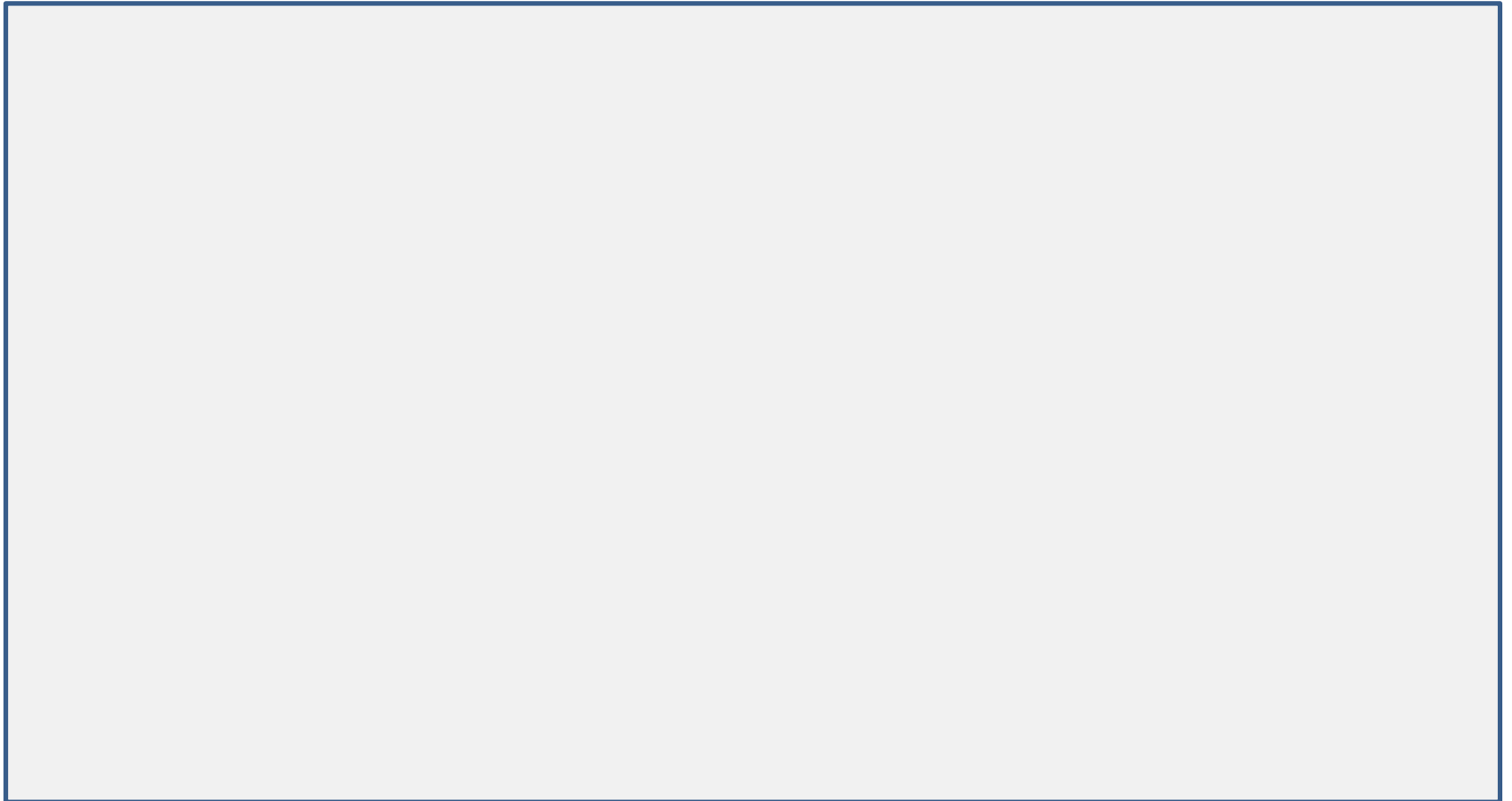
3. 2(3) 交流回路: キャパシタンス

- 交流電力は...

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i dt = \frac{1}{T} \int_0^T C V_m \cos \omega t \times V_m \sin \omega t dt \\ &= \frac{C V_m^2}{T} \int_0^T \frac{\sin 2\omega t}{2} dt \\ &= \frac{C V_m^2}{2T} \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{T=\frac{2\pi}{\omega}} = 0 \end{aligned}$$

3. 2(4)(5) RL直列, RLC並列

- 交流回路の解析方法

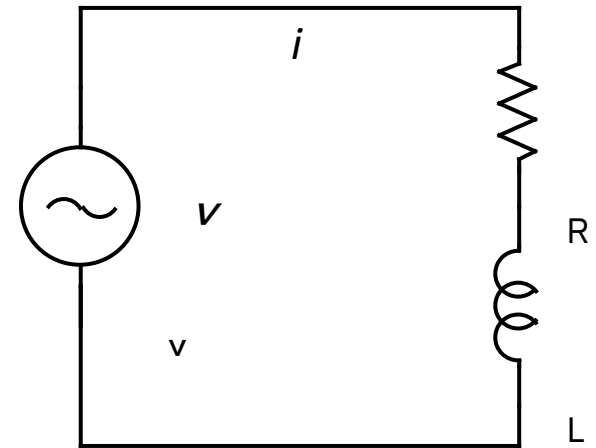


3. 2(4) RL直列

- 図3. 11の回路

1. 電流 $i(t)$ を次式とする

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$



2. 電圧 $v(t)$ は, オームの法則, 起電力より

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$$

3. 微積分の計算

$$v(t) = I_m R \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t$$

3. 2(4) RL直列

$$v = I_m R \sin \omega t + I_m \omega L \cos \omega t$$

これを変形する.

ここで, $v = V_m \sin(\omega t + \theta)$ とすると

$$v = V_m \sin \omega t \cos \theta + V_m \sin \theta \cos \omega t$$

この計算方法
は非常に
便利だから
覚えておく
こと

上2式が等しくなるためには, 次の2式を満たせばよい

$$V_m \cos \theta = I_m R$$

$$V_m \sin \theta = I_m \omega L$$

3. 2(4) RL直列

すなわち $V_m = \frac{I_m R}{\cos \theta} = \frac{I_m \omega L}{\sin \theta}$

$$\frac{R}{\cos \theta} = \frac{\omega L}{\sin \theta}$$

両辺二乗すると

$$\frac{R^2}{\cos^2 \theta} = \frac{\omega^2 L^2}{\sin^2 \theta}$$

$$R^2 (1 - \cos^2 \theta) = \omega^2 L^2 \cos^2 \theta$$

$$(R^2 + \omega^2 L^2) \cos^2 \theta = R^2$$

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

3. 2(4) RL直列

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2 - R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ &= \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\end{aligned}$$

すなわち

$$V_m = \frac{I_m R}{\cos \theta} = \frac{I_m R}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}} = I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

3. 2(4) RL直列

これを代入すると

$$\begin{aligned} v &= V_m \sin(\omega t + \theta) \\ &= I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

ただし,

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

今週のまとめ

- 正弦波交流の表現方法

- 平均値 … 半周期の平均値
- 実効値 … 二乗平均

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

- 交流回路の解析方法

- 微積分形式で回路を解析

- 抵抗 … オームの法則
- コイル … 起電力
- コンデンサ … 電荷量
 - 電流は電荷量の時間微分
- あとは単なる三角関数, 微積分の問題です.

$$v = -L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$q(t) = Cv(t)$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

次週

- 中間テストを実施
- 場所の変更の場合Webで通知
- 教科書, ノート, 電卓他すべて持ち込み禁止
- 授業中の演習問題, 教科書の例題, 賞テスト等をよく復習しておいてください