電気回路 III 第 1b 回演習

1b-1 ある素子に電圧 $v(t) = 150\sin(5000t+45^\circ)$ V を加えたとき，電流 $i(t) = 3\sin(5000t-15^\circ)$ A が流れた．この素子のインピーダンスとアドミッタンスを求めよ．

1b-2 ある素子に電圧 $v(t) = 311\sin(2500t+170^\circ)$ V を加えたとき，電流 $i(t) = 15.5\sin(2500t-145^\circ)$ A が流れた．この素子のインピーダンスとアドミッタンスを求めよ．

1b-3 抵抗 $R = 20\,\Omega$ とインダクタンス $L = 0.02\,\mathrm{H}$ を直列接続した回路にある周波数の正弦波電圧を加えたとき，インピーダンスが $40\angle\theta\,\Omega$ となった．θ と正弦波電圧の周波数を求めよ．

1b-4 抵抗 $R = 10\,\Omega$ とコンデンサ $C = 50\,\mu\mathrm{F}$ を直列接続した回路にある周波数の正弦波電圧を加えたとき，電圧の位相より 30° 進んだ電流が生じた．電流の位相が電圧の位相より 60° 進むようにするためには，周波数をどのようにすればよいか．

解答

1b-1 電圧と電流（フェーザ記法を用いていることに注意）:

$$\dot{V} = \frac{150}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\,\mathrm{V}, \quad \dot{I} = \frac{3}{\sqrt{2}}\angle(-15^\circ)\,\mathrm{A}$$

インピーダンス:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{(150/\sqrt{2})\angle 45^\circ}{(3/\sqrt{2})\angle(-15^\circ)} = 50\angle 60^\circ = 25 + \mathrm{j}25\sqrt{3}\,\Omega$$

アドミッタンス:

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{1}{\dot{Z}}\left(= \frac{(3/\sqrt{2})\angle(-15^\circ)}{(150/\sqrt{2})\angle 45^\circ}\right) = \frac{1}{50}\angle(-60^\circ) = 0.01 - \mathrm{j}0.01\sqrt{3}\,\mathrm{S}$$

1b-2 電圧と電流:

$$\dot{V} = \frac{311}{\sqrt{2}}\angle 170^\circ\,\mathrm{V}, \quad \dot{I} = \frac{15.5}{\sqrt{2}}\angle(-145^\circ)\,\mathrm{A}$$

インピーダンス:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = 20\angle 315^\circ(= 20\angle(-45^\circ)) = 10\sqrt{2} - \mathrm{j}10\sqrt{2}\,\Omega$$

アドミッタンス:

$$\dot{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{20}\angle(-315^\circ)\left(= \frac{1}{20}\angle 45^\circ\right) = \frac{1}{20\sqrt{2}} - \mathrm{j}\frac{1}{20\sqrt{2}}\,\mathrm{S} = \frac{\sqrt{2}}{40} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{40}\,\mathrm{S}$$

1b-3 角周波数を ω とすると，インピーダンスは

$$\dot{Z} = 20 + \mathrm{j}0.02\omega = 40(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$

とかける．この式より，$\cos\theta = 1/2$ であり，$\sin\theta > 0$ であるので，$\theta = 60^\circ$ である．よって，

$$0.02\omega = 0.02 \times 2\pi f = 40\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

$$f = \frac{20\sqrt{3}}{0.02 \times 2\pi} \approx 276\,\mathrm{Hz}$$

1b-4 角周波数を ω とすると，インピーダンスは

$$\dot{Z} = 10 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega 50 \times 10^{-6}} = 10 - \mathrm{j}\frac{2 \times 10^4}{\omega}$$

とかける．これが，$|\dot{Z}|\angle(-30^\circ)$ と等しいので，

$$|\dot{Z}|\angle(-30^\circ) = |\dot{Z}|\cos 30^\circ - |\dot{Z}|\mathrm{j}\sin 30^\circ = 10 - \mathrm{j}\frac{2 \times 10^4}{\omega}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
|\dot{Z}|\cos 30^\circ &= |\dot{Z}|\frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \\
|\dot{Z}| &= \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}\,\Omega \\
|\dot{Z}|\sin 30^\circ &= \frac{20\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 10^4}{\omega} \\
\omega &= \frac{12 \times 10^4}{20\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \times 10^3\,\mathrm{rad/s} \\
f &= \frac{\omega}{2\pi} \approx 551\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}$$

変更後の角周波数を ω' とすると，変更後のインピーダンス $\dot{Z}'$ は

$$\dot{Z}' = 10 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega' 50 \times 10^{-6}} = 10 - \mathrm{j}\frac{2 \times 10^4}{\omega'}$$

とかける．これが，$|\dot{Z}'|\angle(-60^\circ)$ と等しいので，

$$|\dot{Z}'|\angle(-60^\circ) = |\dot{Z}'|\cos 60^\circ - |\dot{Z}'|\mathrm{j}\sin 60^\circ = 10 - \mathrm{j}\frac{2 \times 10^4}{\omega'}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
|\dot{Z}'|\cos 60^\circ &= |\dot{Z}'|\frac{1}{2} = 10 \\
|\dot{Z}'| &= 20\,\Omega \\
|\dot{Z}'|\sin 60^\circ &= 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \times 10^4}{\omega'} \\
\omega' &= \frac{2 \times 10^4}{10\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 10^3\,\mathrm{rad/s} \\
f &= \frac{\omega'}{2\pi} \approx 184\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}$$

以上より，周波数を 1/3 にすればよい（551 Hz から 184 Hz まで下げればよい）．